9. cvičení - teorie

8. 12. 2022

Definice 1. Funkce f je *spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Fakt 2. Polynom je spojitá funkce.

Věta 3 (Limita složené funkce)**.** Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Nechť platí, že $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{x\to D} f(x) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek:

(P) $\exists \eta > 0\ \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D.

Pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 4 (Heine)**.** Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a pro reálnou funkci f platí $lim_{x\to c} f(x) = A$. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z definičního oboru funkce f taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Fakt 5 (Známé limity)**.** Platí, že:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Další užitečné limity odvozené od známých limit:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Co se může hodit:

- Nechť $x > 0$, pak $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$
- $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$
- $a^y = e^{y \log(a)}$